УДК 621.77

**Михалевич В. М.**
**Краевский В. А.**
**Краевский С. А.**
**Павлюк А. И.**

# СТРУКТУРА ТЕНЗОРНОЙ МОДЕЛИ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ С УЧЕТОМ «ПАМЯТИ НАПРАВЛЕНИЙ» ДЛЯ МНОГОЭТАПНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Представление повреждения макрочастицы материала в виде тензора позволило описать широкий класс экспериментальных данных, который не вмещался в рамки скалярных моделей. Но все же ряд эффектов, которые встречаются при многоэтапном изменении направления холодного пластического деформирования (например существенный разброс экспериментальных данных в случае, когда косинус излома траектории деформирования меньше нуля и на предыдущих этапах практически полностью исчерпан ресурс пластичности материала [1]), в существующих современные моделях разрушения не находят своего отображения. Результаты анализа свидетельствуют, что простым усложнением функций, которые входят в модель разрушения материалов, как правило, невозможно достичь значительного улучшения адекватности модели [2]. Соответственно, усложнение модели должно происходить путем выдвижения физически обоснованных концепций и базироваться на учете этих концепций в самой структуре модели.

Для построения тензорной модели накопления повреждений в работе [3] выдвигается гипотеза, что внезапное изменение направления деформирования сопровождается постепенным поворотом главных направлений тензора повреждений. И в результате главные направления тензора накопления повреждений и главные направления тензора приращений деформаций становятся соосными только после накопления определенной степени пластической деформации. На основе этой гипотезы в работе [4] построена структура тензорно-линейной модели с учетом «памяти направлений» для случая двухэтапного изменения направления холодного пластического деформирования. Как показала проверка адекватности предложенной модели [5], учет «памяти направлений» способствует лучшему количественному и качественному соответствию экспериментальным данным двухэтапного деформирования, особенно в случае, когда косинус излома траектории деформирования меньше нуля.

Целью этой работы является обобщение структуры тензорно-линейной модели накопления повреждений с учетом «памяти направлений» на случай многоэтапного изменения направления холодного пластического деформирования.

За базовую возьмем тензорно-линейную модель, которая предложена Г. Д. Делем [6]:

$$\psi_{ij}(\varepsilon_u) = \int_0^{\varepsilon_u} F(\varepsilon_u, \eta, \mu_\sigma) \cdot \beta_{ij} \cdot d\varepsilon_u \, , \tag{1}$$

где $\psi_{ij}$ – тензор повреждений; $\varepsilon_u$ – накопленная деформация; $F(\varepsilon_u, \eta, \mu_\sigma) = \dfrac{df}{d\varepsilon_u}$ – положительная функция, которая зависит от характеристик материала; $f\left(\varepsilon_u, \varepsilon_{*c}(\eta, \mu_\sigma)\right)$ – функция повреждаемости; $\beta_{ij}$ – направляющий тензор приращений деформаций; $\eta, \mu_\sigma$ – параметры напряженно-деформированного состояния.

Под многоэтапным деформированием понимается процесс, который можно разбить на отдельные этапы, в пределах которых деформирование является стационарным. Относительно многоэтапного деформирования для $m$ -ого этапа модель (1) принимает вид:

$$\psi_{ij}(\varepsilon_u) = \beta_{ij}^{(1)} \cdot \int\limits_0^{\varepsilon_u^{(1)}} F(\varepsilon_u;\eta^{(1)};\mu_\sigma^{(1)}) \cdot d\varepsilon_u + \beta_{ij}^{(2)} \cdot \int\limits_{\varepsilon_u^{(1)}}^{\varepsilon_u^{(1)}+\varepsilon_u^{(2)}} F(\varepsilon_u;\eta^{(2)};\mu_\sigma^{(2)}) \cdot d\varepsilon_u + \ldots +$$
$$+ \beta_{ij}^{(m)} \cdot \int\limits_{\varepsilon_u^{(1)}+\varepsilon_u^{(2)}+\ldots+\varepsilon_u^{(m-1)}}^{\varepsilon_u} F(\varepsilon_u;\eta^{(m)};\mu_\sigma^{(m)}) \cdot d\varepsilon_u, \qquad (2)$$

где $\varepsilon_u^{(r)}, \beta_{ij}^{(r)}$ – накопленная деформация и направляющий тензор приращений деформаций на $r$-ом этапе соответственно.

Одним из постулатов, на основе которых построена модель (1), является соосность главных направлений тензоров накопления повреждений и приращений пластических деформаций. Если откинуть этот постулат и предположить, что главные направления тензора накопления повреждений постепенно поворачиваются, то относительно $m$-этапного деформирования направляющий тензор накопления повреждений можно представить в виде:

$$\beta_{ij}(\varepsilon_u) = \begin{cases} \beta_{ij}^{(1)}, 0 \le \varepsilon_u \le \varepsilon_u^{(1)}; \\ \beta_{ij}^{(12)}, \varepsilon_u^{(1)} \le \varepsilon_u \le \varepsilon_u^{(1)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(1)}; \\ \beta_{ij}^{(2)}, \varepsilon_u^{(1)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(1)} \le \varepsilon_u \le \varepsilon_н^{(2)}; \\ \beta_{ij}^{(23)}, \varepsilon_н^{(2)} \le \varepsilon_u \le \varepsilon_н^{(2)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(2)}; \\ \ldots \\ \beta_{ij}^{(m-1)}, \varepsilon_н^{(m-2)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(m-2)} \le \varepsilon_u \le \varepsilon_н^{(m-1)}; \\ \beta_{ij}^{(m-1,m)}, \varepsilon_н^{(m-1)} \le \varepsilon_u \le \varepsilon_н^{(m-1)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(m-1)}; \\ \beta_{ij}^{(m)}, \varepsilon_н^{(m-1)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(m-1)} \le \varepsilon_u \le \varepsilon_*, \end{cases} \qquad (3)$$

где $\beta_{ij}^{(r)}$ – направляющий тензор приращений деформаций на $r$-ом этапе; $\beta_{ij}^{(r,r+1)}$ – направляющий тензор, который определяет положение главных направлений тензора накопления повреждений при их повороте от направления, которое совпадает с главными направлениями тензора приращений деформаций на $r$-ом этапе деформирования, к направлению, которое совпадает с главными направлениями тензора приращений деформации на $(r+1)$-ом этапе деформирования. $\beta_{ij}^{(r,r+1)}$ представим как линейную комбинацию направляющих тензоров:

$$\beta_{ij}^{(r,r+1)} = \frac{(1-\delta^{(r)}) \cdot \beta_{ij}^{(r)} + \delta^{(r)} \cdot \beta_{ij}^{(r+1)}}{\sqrt{\left(1-\delta^{(r)}\right)^2 + 2 \cdot \delta^{(r)} \cdot (1-\delta^{(r)}) \cdot k_{r,r+1} + {\delta^{(r)}}^2}}. \qquad (4)$$

Параметр $\delta^{(r)}$ определяется накопленной деформацией на $(r+1)$ этапе деформирования и критической деформацией $\Delta\varepsilon_{кр}^{(r)}$, по достижению которой главные направления тензоров накопления повреждений и приращений пластических деформаций становятся соосными.

Накопленная до $r$-ого этапа деформация определяется по формуле:

$$\varepsilon_н^{(r)} = \sum_{q=1}^{r} \varepsilon_u^{(q)} + \sum_{q=1}^{r-1} \Delta\varepsilon_{кр}^{(q)}, \qquad (5)$$

а деформация $\Delta\varepsilon_{кр}^{(r)}$:

$$\Delta\varepsilon_{кр}^{(r)} = \varepsilon_{*c}^{(r+1)} \cdot \frac{a}{e^{a \cdot \left(\frac{\varepsilon_{*c}^{(r)}}{\varepsilon_{и}^{(r)}}\right)^{2a}}}, \tag{6}$$

где $a$ – параметр, который зависит от материала.

Функция $\delta^{(r)}(\varepsilon_{и})$ должна быть монотонно возрастающей на промежутке $\left[\varepsilon_{н}^{(r)}; \varepsilon_{н}^{(r)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(r)}\right]$ и удовлетворять условия:

$$\begin{cases} \delta(\varepsilon_{н}^{(r)}) = 0; \\ \delta(\varepsilon_{н}^{(r)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(r)}) = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Для выполнения условий (7) выбираем функцию:

$$\delta^{(r)} = \frac{\varepsilon_{и} - \varepsilon_{н}^{(r)}}{\Delta\varepsilon_{кр}^{(r)}}. \tag{8}$$

Если разрушение достигается на конец $m$-ого этапа, то условие разрушения будет иметь вид [2]:

$$\sum_{q=1}^{m} g_q \sum_{r=1}^{m} g_r k_{qr} = 1, \tag{9}$$

где:

$$\begin{aligned} &g_1 = f(\varepsilon_{и}^{(1)}, \varepsilon_{*1}) - f(0, \varepsilon_{*1}) + \\ &+ \int_{\varepsilon_{и}^{(1)}}^{\varepsilon_{и}^{(1)} + \Delta\varepsilon_{кр}} \frac{\left(1-\delta^{(1)}\right)}{\sqrt{\left(1-\delta^{(1)}\right)^2 + 2\cdot\delta^{(1)}\cdot\left(1-\delta^{(1)}\right)\cdot k_{12} + \delta^{(1)2}}} \cdot F(\varepsilon_{и}; \eta^{(2)}; \mu_{\sigma}^{(2)}) \cdot d\varepsilon_{и}; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &g_r = f(\varepsilon_{н}^{(r)}, \varepsilon_{*c}^{(r)}) - f(\varepsilon_{н}^{(r-1)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(r-1)}, \varepsilon_{*c}^{(r)}) + \\ &+ \int_{\varepsilon_{н}^{(r-1)}}^{\varepsilon_{н}^{(r-1)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(r-1)}} \frac{\delta^{(r-1)}}{\sqrt{\left(1-\delta^{(r-1)}\right)^2 + 2\cdot\delta^{(r-1)}\cdot\left(1-\delta^{(r-1)}\right)\cdot k_{(r-1,r)} + {\delta^{(r-1)}}^2}} \times \\ &\times F(\varepsilon_{и}; \eta^{(r)}; \mu_{\sigma}^{(r)}) \cdot d\varepsilon_{и} + \int_{\varepsilon_{н}^{(r)}}^{\varepsilon_{н}^{(r)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(r)}} \frac{\delta^{(r)}}{\sqrt{\left(1-\delta^{(r)}\right)^2 + 2\cdot\delta^{(r)}\cdot\left(1-\delta^{(r)}\right)\cdot k_{(r,r+1)} + {\delta^{(r)}}^2}} \times \\ &\times F(\varepsilon_{и}; \eta^{(r+1)}; \mu_{\sigma}^{(r+1)}) \cdot d\varepsilon_{и}, \\ &r = \overline{2, m-1}; \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &g_m = f(\varepsilon_{*}, \varepsilon_{*c}^{(m)}) - f(\varepsilon_{н}^{(m-1)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(m-1)}, \varepsilon_{*c}^{(m)}) + \\ &+ \int_{\varepsilon_{н}^{(m-1)}}^{\varepsilon_{н}^{(m-1)} + \Delta\varepsilon_{кр}^{(m-1)}} \frac{\delta^{(m-1)}}{\sqrt{\left(1-\delta^{(m-1)}\right)^2 + 2\cdot\delta^{(m-1)}\cdot\left(1-\delta^{(m-1)}\right)\cdot k_{(m-1,m)} + {\delta^{(m-1)}}^2}} \times \\ &\times F(\varepsilon_{и};\ \eta^{(m)};\ \mu_{\sigma}^{(m)}) \cdot d\varepsilon_{и}, \end{aligned} \tag{12}$$

$\varepsilon_*$ – накопленная до разрушения деформация; $\varepsilon_{*_c}^{(r)} = \varepsilon_{*_c}\left(\eta^{(r)}; \mu_\sigma^{(r)}\right)$ – значение предельной деформации из диаграммы пластичности для $r$-ого этапа, напряженно-деформированное состояние которого характеризуется параметрами $\eta^{(r)}$ и $\mu_\sigma^{(r)}$; $k_{qr} = \beta_{ij}^{(q)} \cdot \beta_{ij}^{(r)}$ – косинус излома траектории деформирования.

Если $r$-ый этап начался до завершения поворота главных направлений тензора накопления повреждений, тогда косинус излома траектории деформирования:

$$k_{(r-1,r)} = \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon_u^{(r-1)}}{\Delta\varepsilon_{кр}^{(r-2)}}\right) \cdot \beta_{ij}^{(r-2)} + \frac{\varepsilon_u^{(r-1)}}{\Delta\varepsilon_{кр}^{(r-2)}} \cdot \beta_{ij}^{(r-1)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\varepsilon_u^{(r-1)}}{\Delta\varepsilon_{кр}^{(r-2)}}\right)^2 + 2 \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_u^{(r-1)}}{\Delta\varepsilon_{кр}^{(r-2)}}\right) \cdot \frac{\varepsilon_u^{(r-1)}}{\Delta\varepsilon_{кр}^{(r-2)}} \cdot k_{(r-2,r-1)} + \left(\frac{\varepsilon_u^{(r-1)}}{\Delta\varepsilon_{кр}^{(r-2)}}\right)^2}} \cdot \beta_{ij}^{(r)}. \quad (13)$$

Если разрушение на последнем этапе происходит до завершения поворота главных направлений тензора накопления повреждений, то:

$$g_m = \int_{\varepsilon_н^{(m-1)}}^{\varepsilon_*} \frac{\delta}{\sqrt{(1-\delta)^2 + 2 \cdot \delta \cdot (1-\delta) \cdot k_{(m-1,m)} + \delta^2}} \cdot F(\varepsilon_u; \eta^{(m)}; \mu_\sigma^{(m)}) \cdot d\varepsilon_u. \quad (14)$$

## ВЫВОДЫ

Построена структура тензорно-линейной модели с учетом «памяти направлений» для случая многоэтапного изменения направления холодного пластического деформирования. Рассмотрены частные случаи, когда некоторые этапы начинаются и разрушение на последнем этапе происходит до завершения поворота главных направлений тензора накопления повреждений.

## ЛИТЕРАТУРА

*1. Mikhalevich V. The comparative analysis of scalar and tensor models of damage accumulation on two-stage cold deformation example / V. Mikhalevich , V. Kraevsky, K. Kozlov // Buletinul Institutului Politehnic din Iasi. – Iasi. – 2002. – Tomul XLXII(LI), fasc. 3–4. – P. 21–28.*

*2. Михалевич В. М. Тензорні моделі накопичення пошкоджень / В. М. Михалевич. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 1998. – 195 с.*

*3. Тензорно-лінійна модель з врахуванням «пам'яті напрямів» при двохступеневому деформуванні / В. М. Михалевич, В. А. Матвійчук, В. О. Краєвський, К. Є. Козлов // Удосконалення процесів і обладнання обробки тиском в металургії і машинобудуванні. – Краматорськ-Хмельницький : ДДМА. – 2002. – С. 13–15.*

*4. Михалевич В. М. Розробка структури тензорно-лінійної моделі накопичення пошкоджень із врахуванням «пам'яті напрямів» / В. М. Михалевич, В. О. Краєвський // Праці міжнародної науково-технічної конференції «Застосування теорії пластичності в сучасних технологіях обробки тиском і автотехнічних експертизах». – Вінниця : ВНТУ. – 2006. – С. 97–99.*

*5. Михалевич В. М. Математичне моделювання механіки формоутворення при холодному торцевому розкочуванні та ротаційній витяжці : монографія / В. М. Михалевич, В. О. Краєвський. – Вінниця : УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2008. – 188 с.*

*6. Дель Г. Д. Пластичность при немонотонном деформировании / Г. Д. Дель. – Воронеж, 1982. – 10 с.*

Михалевич В. М. – д-р техн. наук, проф. ВНТУ;
Краевский В. А. – канд. техн. наук, доц. ВНТУ;
Краевский С. А. – магистр ВНТУ;
Павлюк А. И. – студент ВНТУ.

ВНТУ – Винницкий национальный технический университет, г. Винница.

E-mail: vkraevsky@mail.ru.